Задачи на движение:

1. Все эти задачи решаются по одной-единственной формуле: S=v \cdot t, то есть расстояние = скорость \cdot время. Из этой формулы можно выразить скорость v=S/t или время t=s/v.
2. В качестве переменной x удобнее всего выбирать скорость. Тогда задача точно решится!

Для начала очень внимательно читаем условие. В нем все уже есть. Помним, что текстовые задачи на самом деле очень просты.

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 4 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Что здесь лучше всего обозначить за x? Скорость велосипедиста. Тем более, что ее и надо найти в этой задаче. Автомобилист проезжает на 40 километров больше, значит, его скорость равна x+40.

Нарисуем таблицу. В нее сразу можно внести расстояние — и велосипедист, и автомобилист проехали по 50 км. Можно внести скорость — она равна x и x+40 для велосипедиста и автомобилиста соответственно. Осталось заполнить графу «время».

Его мы найдем по формуле: t=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle S}{\displaystyle v}. Для велосипедиста получим t_1=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 50}{\displaystyle x}, для автомобилиста t_2=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 50}{\displaystyle x + 40}.  
Эти данные тоже запишем в таблицу.

Вот что получится:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | v | t | S |
| велосипедист | x | t_1=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 50}{\displaystyle x} | 50 |
| автомобилист | x+40 | t_2=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 50}{\displaystyle x + 40} | 50 |

Остается записать, что велосипедист прибыл в конечный пункт на 4 часа позже автомобилиста. Позже — значит, времени он затратил больше. Это значит, что t_1 на четыре больше, чем t_2, то есть t_2 + 4 = t_1

Решаем уравнение.

Приведем дроби в левой части к одному знаменателю.

Первую дробь домножим на x+4, вторую — на x.

*Если вы не знаете, как приводить дроби к общему знаменателю (или — как раскрывать скобки, как решать уравнение...), подойдите с этим конкретным вопросом к вашему учителю математики и попросите объяснить. Бесполезно говорить учительнице: «Я не понимаю математику» — это слишком абстрактно и не располагает к ответу. Учительница может ответить, например, что она вам сочувствует. Или, наоборот, даст какую-либо характеристику вашей личности. И то и другое неконструктивно.*

А вот если вы зададите конкретный вопрос: «Как приводить дроби к одному знаменателю» или «Как раскрывать скобки» — вы получите нужный вам конкретный ответ. Вам ведь необходимо в этом разобраться! Если педагог занят, договоритесь о времени, когда вы можете с ним (или с ней) встретиться, чтобы получить консультацию. Используйте ресурсы, которые у вас под рукой!

Получим:

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 50\left( x+40 \right)-50x}{\displaystyle x\left( x + 40 \right)}=4

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 50x+2000 -50x}{\displaystyle x\left( x + 40 \right)}=4

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 2000}{\displaystyle x\left( x + 40 \right)}=4

Разделим обе части нашего уравнения на 4. В результате уравнение станет проще. Но почему-то многие учащиеся забывают это делать, и в результате получают сложные уравнения и шестизначные числа в качестве дискриминанта.

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 500}{\displaystyle x\left( x + 40 \right)}=1

Умножим обе части уравнения на x\left( x + 40 \right). Получим:

x\left( x + 40 \right)=500

Раскроем скобки и перенесем всё в левую часть уравнения:

x^2+40x=500

x^2+40x-500=0

Мы получили квадратное уравнение. Напомним, что квадратным называется уравнение вида ax^2+bx+c=0. Решается оно стандартно — сначала находим дискриминант по формуле D=b^2-4ac, затем корни по формуле x_{1,2} = \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle -b \pm \sqrt{D}}{\displaystyle 2a}.

В нашем уравнении a=1, b=40, c=-500.

Найдем дискриминант D=1600+2000=3600 и корни:

x_1=10, x_2=-50.

Ясно, что x_2 не подходит по смыслу задачи — скорость велосипедиста не должна быть отрицательной.

Ответ: 10.

Следующая задача — тоже про велосипедиста.

2. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость велосипедиста на пути из A в B равна x. Тогда его скорость на обратном пути равна x+3. Расстояние в обеих строчках таблицы пишем одинаковое — 70 километров. Осталось записать время. Поскольку t=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle S}{\displaystyle v}, на путь из A в B велосипедист затратит время t_1=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 70}{\displaystyle x}, а на обратный путь время t_2=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 70}{\displaystyle x + 3}.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | v | t | S |
| туда | x | t_1=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 70}{\displaystyle x} | 70 |
| обратно | x+3 | t_2=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 70}{\displaystyle x + 3} | 70 |

На обратном пути велосипедист сделал остановку на 3 часа и в результате затратил столько же времени, сколько на пути из A в B. Это значит, что на обратном пути он крутил педали на 3 часа меньше.

Значит, t_2 на три меньше, чем t_1. Получается уравнение:

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 70}{\displaystyle x + 3}+3=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 70}{\displaystyle x}

Как и в предыдущей задаче, сгруппируем слагаемые:

Точно так же приводим дроби к одному знаменателю:

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 70\left( x+3 \right) - 70x}{\displaystyle x\left( x+3 \right)}=3

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 210}{\displaystyle x\left( x+3 \right)}=3

Разделим обе части уравнения на 3.

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle70}{\displaystyle x\left( x+3 \right)}=1

Умножим обе части уравнения на x\left( x+3 \right), раскроем скобки и соберем все в левой части.

x^2+3x-70=0

Находим дискриминант. Он равен 9+4\cdot 70=289.

Найдем корни уравнения:

x_1=7. Это вполне правдоподобная скорость велосипедиста. А ответ x_2 = -10 не подходит, так как скорость велосипедиста должна быть положительна.

Ответ: 7.

Следующий тип задач — когда что-нибудь плавает по речке, в которой есть течение. Например, теплоход, катер или моторная лодка. Обычно в условии говорится о собственной скорости плавучей посудины и скорости течения. Собственной скоростью называется скорость в неподвижной воде.

При движении по течению эти скорости складываются. Течение помогает, по течению плыть — быстрее.

Скорость при движении по течению равна сумме собственной скорости судна и скорости течения.

А если двигаться против течения? Течение будет мешать, относить назад. Теперь скорость течения будет вычитаться из собственной скорости судна.

3. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x.

Тогда скорость движения моторки по течению равна x+1, а скорость, с которой она движется против течения x-1.

Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 255 км.

Занесем скорость и расстояние в таблицу.

Заполняем графу «время». Мы уже знаем, как это делать. При движении по течению t_1=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x+1}, при движении против течения t_2=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x-1}, причем t_2 на два часа больше, чем t_1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | v | t | S |
| по течению | x+1 | t_1=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x+1} | 255 |
| против течения | x-1 | t_2=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x-1} | 255 |

Условие «t_2 на два часа больше, чем t_1» можно записать в виде:

t_1+2=t_2

Составляем уравнение:

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x+1}+2=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x-1}

и решаем его.

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x-1}-\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x+1}=2

Приводим дроби в левой части к одному знаменателю

Раскрываем скобки

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 510}{\displaystyle x^2-1}=2

Делим обе части на 2, чтобы упростить уравнение

\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 255}{\displaystyle x^2-1}=1

Умножаем обе части уравнения на x^2-1

x^2-1=255

x^2=256

Вообще-то это уравнение имеет два корня: x_1=16 и x_2=-16 (оба этих числа при возведении в квадрат дают 256). Но конечно же, отрицательный ответ не подходит — скорость лодки должна быть положительной.

Ответ: 16.

4. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Снова обозначим за x скорость течения. Тогда скорость движения теплохода по течению равна 15+x, скорость его движения против течения равна 15-x. Расстояния — и туда, и обратно — равны 200 км.

Теперь графа «время».

Поскольку t=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle S}{\displaystyle v}, время t_1 движения теплохода по течению равно \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 200}{\displaystyle 15+x}, которое теплоход затратил на движение против течения, равно \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 200}{\displaystyle 15-x}.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | v | t | S |
| по течению | x+15 | \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 200}{\displaystyle 15+x} | 200 |
| против течения | 15-x | \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 200}{\displaystyle 15-x} | 200 |

В пункт отправления теплоход вернулся через 40 часов после отплытия из него. Стоянка длилась 10 часов, следовательно, 30 часов теплоход плыл — сначала по течению, затем против.

Значит, t_1+t_2=30

Прежде всего разделим обе части уравнения на 10. Оно станет проще!

Мы не будем подробно останавливаться на технике решения уравнения. Всё уже понятно — приводим дроби в левой части к одному знаменателю, умножаем обе части уравнения на 255-x^2, получаем квадратное уравнение x^2=25. Поскольку скорость течения положительна, получаем: x=5.

Ответ: 5.

Наверное, вы уже заметили, насколько похожи все эти задачи. Текстовые задачи хороши еще и тем, что ответ легко проверить с точки зрения здравого смысла. Ясно, что если вы получили скорость течения, равную 300 километров в час — задача решена неверно.

5. Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B — 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Пусть скорость течения равна x. Тогда по течению баржа плывет со скоростью 7+x, а против течения со скоростью 7-x.

Сколько времени баржа плыла? Ясно, что надо из 16 вычесть 10, а затем вычесть время стоянки. Обратите внимание, что 1 час 20 минут придется перевести в часы: 1 час 20 минут =1\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 1}{\displaystyle 3} часа. Получаем, что суммарное время движения баржи (по течению и против) равно 4\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 2}{\displaystyle 3} часа.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | v | t | S |
| по течению | x+7 | t_1 | 15 |
| против течения | 7-x | t_2 | 15 |

t_1+t_2=4\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 2}{\displaystyle 3}

Возникает вопрос — какой из пунктов, A или B, расположен выше по течению? А этого мы никогда не узнаем! :-) Да и какая разница — ведь в уравнение входит сумма t_1+t_2, равная \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 15}{\displaystyle 7+x}+\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 15}{\displaystyle 7-x}.

Итак,

Решим это уравнение. Число 4\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 2}{\displaystyle 3} в правой части представим в виде неправильной дроби: 4\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 2}{\displaystyle 3}=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 14}{\displaystyle 3}.

Приведем дроби в левой части к общему знаменателю, раскроем скобки и упростим уравнение. Получим:

30 \cdot 7=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 14}{\displaystyle 3} \cdot \left( 49-x^2 \right)

Работать с дробными коэффициентами неудобно! Если мы разделим обе части уравнения на 14 и умножим на 3, оно станет значительно проще:

45=49-x^2

x^2=4

Поскольку скорость течения положительна, x=2.

Ответ: 2.